# РАССМОТРЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕЧНОГО СТОКА

**К.А. Степанов**
ГНУ ВНИИГиМ Россельхозакадемии, г.Москва, Россия

Для обеспечения безопасности гидротехнических сооружений, при проектировании следует оценивать последствия разрушения гидроузлов. Должны определяться параметры затопления местности, такие как максимальные глубина затопления, ширина затопления и скорость течения, время прихода фронта, гребня и хвоста волны прорыва, максимальный расход воды в створе, высота волны и максимальная отметка затопления. Для расчета этих параметров использует использовать теоретические методы расчета волн прорыва. Исходные данные для проектирования гидротехнических сооружений получают в результате изысканий и исследований. Используя данные изысканий и исследований, выполняют дальнейшие расчеты.

Для моделирования сложных течений требуется рассмотреть задачу об обтекании сложной границы течениями тяжелой жидкости со свободной поверхностью в присутствии источников. Для таких моделей необходимо рассматривать особенности рельефа границы на малых масштабах и их нетривиальные последствия на больших масштабах. Уравнения Эйлера, которые описывают гидродинамику течений идеальной жидкости, очень сложны, но и они даже при наличии границы и условии несжимаемости, баротропности и отсутствии турбулентности не позволяют найти решения при сильном изменении рельефа дна. Таким образом, поиск альтернативных приближенных моделей является актуальной задачей.

Стационарное уравнение мелкой воды.

Для начала рассмотрим стационарные уравнения мелкой воды. Уравнения мелкой воды описывают те течения жидкости, в которых глубина много меньше длины течения. Система уравнений описывающее стационарное движение невязкой жидкости имеет вид:

$$div(\rho V) = 0, \qquad (V\nabla)V = -\frac{1}{\rho}\nabla P - g;$$

где $\rho$ - плотность, $V$ — скорость; $P$ — давление; g — ускорение свободного падения.

Граничные условия при этом будут:

$(Vb, n) = 0$, - это означает, что скорости на дне равны 0.

$Ps = PA$, где $Vb$ — скорость жидкости на дне; $n$ — нормальный вектор к подстилающей поверхности;

$Ps$ — давление в жидкости на поверхности; $PA$ — внешнее давление.

Так как жидкость несжимаема и однородна, то можно записать:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0,$$

$$V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}-0,$$
$$V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+g=0$$

где *x*, *y* — декартовы координаты, причем вертикальная ось *Oy* направлена в сторону, противоположную направлению силы тяжести. Давление распределено по стандартному гидростатическому закону:

$$P(y)=P_A+\rho g(h-y),$$

Проинтегрируем по вертикали первые два уравнения:

$$\int_z^h\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)dy=0,$$

$$\int_z^h\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\right)dy=0$$

Граничные условия в прямоугольной системе координат записываются так:

$$\frac{V_y(x,y)}{V_x(x,y)}=\frac{\partial z}{\partial x},y=z,$$

$$V_y(x,y)=\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial h}{\partial x}V_x(x,y),y=h,$$

где $z(x)$ — функция, задающая подстилающую поверхность. Далее система преобразуется к виду:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_z^h V_x\,dy=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_z^h V_x^2\,dy+g(h-z)\frac{\partial h}{\partial x}=0.$$

Горизонтальная составляющая скорости $Vx$ представляется в виде суммы средней скорости $u=Vx$ и отклонения от среднего $V'(x,y)$.

$$V_x=u+V_x'(x,y),$$

$$\int_z^h V_x'(x,y)=0\,,\qquad u=\frac{1}{h-z}\int_z^h V_x(x,y)\,dy$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_z^h V_x'^2\,dy\approx 0,$$

Далее:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((h-z)u\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((h-z)u^2\right)+g(h-z)\frac{\partial h}{\partial x}=0.$$

Введя новую переменную *h*=*h*-*z*, отсчитываемую от подстилающей поверхности, перепишем систему в виде:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial(hu^2)}{\partial x}+gh\frac{\partial(h+z)}{\partial x}=0.$$

Это и есть система одномерных стационарных уравнений Сен-Венана. Далее можно получить частные решения для этой задачи и рассмотреть возможные режимы стационарного течения.

Далее рассмотрим нестационарные случаи. Пусть движение происходит под действием только силы тяжести, которая направлена вертикально вниз. Тогда для движения жидкости можно записать:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta v,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta w,$$

где ν коэффициент кинематической вязкости.

Эти уравнения представляют собой уравнение неразрывности жидкости и уравнения Навье-Стокса. Для упрощения этих уравнений можно перейти к одномерной модели путем осреднения по сечению потока. В одномерных моделях принимается, что извилистость русла пренебрежимо мало и поэтому свободная поверхность постоянна в каждом сечении ξ =ξ (*x*,*t*). Также движение медленно изменяющееся, что позволяет не учитывать резкое сужение или расширение русла реки. Теперь приведу вывод уравнения для русла переменной ширины. Нам известен рельеф дна в нескольких сечения, т.е. задана функция *b* = *b*(*x*, *z*).

В любой момент времени поток имеет площадь живого сечения равную:

$$\omega(x,\xi)=\int_{b1(x,\xi)}^{b2(x,\xi)}\int_{H}^{\xi}dy\,dz.$$

Также зададим расход воды – это количество воды, проходящее через живое сечение в единицу времени:

$$Q(x,t)=\int_{\omega}u\,d\omega.$$

Одномерный случай неразрывности жидкости запишем как:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=q$$

В качестве глубины можно принять среднюю глубину сечения, также уклон дна между сечениями примем постоянным i0, тогда:

$$\frac{\partial hcp}{\partial x}=\frac{\partial \xi}{\partial x}+i0$$

Также следует ввести среднюю скорость по сечению. Тогда уравнение неразрывности перепишем:

$$\frac{\partial (hcpB)}{\partial t}+\frac{\partial (\omega ucp)}{\partial x}=q.$$

Далее усредним уравнение движения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\omega} u\,d\omega+\frac{\partial}{\partial x}\int_{\omega} u^2\,d\omega+g\omega\frac{\partial hcp}{\partial x}=\int_{b1}^{b2}\frac{u_q q}{B}dy+g\omega(i0-i_f).$$

Тогда получим:

$$\frac{\partial ucp}{\partial t}+ucp\frac{\partial ucp}{\partial x}+g\frac{\partial hcp}{\partial x}=\frac{q}{\omega}(u_q-ucp)+g(i0-i_f).$$

Это уравнения Сен-Венана для одномерного случая.

Теперь перейдем к поиску численных решений уравнений Сен-Венана.

Это возможно при ограничениях:

1) Поток прямолинеен и скорости одинаковы по всему живому сечению;
2) Давление подчиняется гидростатическому закону;
3) Уклон дна относительно мал;
4) Существует однозначная зависимость расхода воды от уровня;
5) Боковой поток поступает в русло реки нормально к ее направлению и отражает пространственный и временной ход бокового притока.

Полученная выше система не решается аналитически, возможно только найти ее численные решения.

Для выполнения расчета требуется задать начальные и граничные условия на выбранном участке расчета. В начальных условиях требуется задать скорость потока и расход во всех точках русла в момент времени t=0. Граничные условия задают высоту слоя воды, ее скорость или расход в вернем и нижнем участках реки в любой момент времени. Для равномерного движения расход воды в открытом русле определен по формуле Шези-Манинга:

$$Q=\omega k/nR^{2/3}I^{0.5}$$

где n – параметр шероховатости по Манингу; R – гидравлический радиус; I – уклон дна русла; k – коэффициент пропорциональности. В реальных условиях при неравномерном движении площадь поперечного сечения будет меняться вдоль русла, и также изменяться во времени. Но так как не всегда можно получить данные для подробного задания требуемых условий можно применить следующий подход. Будем применять уравнения для участков с неизменными по длине гидравлическими характеристиками. Для каждого участка будем решать систему уравнений Сен-Венана. Причем для каждого последующего участка входные данные будут рассчитываться на предыдущем участке. Таким образом, можно упростить алгоритм поставленной задачи. Задача моделирования речного стока является важной проблемой в гидравлике. В настоящее время нет единого решения для прогноза речного стока. Постоянное стремление к упрощению методов приводит к потере качества в результатах исследования. Но для более сложных моделей требуется задавать многочисленные данные наблюдений, которых зачастую нет, поэтому приходится прибегать к упрощению моделей. Одномерные модели моделирования речного стока могут применяться лишь для предварительных расчетов. Для более точного исследования следует применять модели более высокого уровня.