УДК : 532.546+518.5

Мурзакматов М.У., Шамырканов М.Б.
ЫГУ им. К. Тыныстанова

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ УРОВНЕМ ГРУНТОВЫХ ВОД

Разрабатывается алгоритм приближенного решения задачи оптимального управления уровнем грунтовых вод, который апробирован на решении тестовых задач.

Управление уровнем грунтовых вод (УГВ) необходимо для обеспечения требуемой мелиоративной обстановки в заданной области фильтрации. Управление можно осуществлять с помощью функции инфильтрации (обводнением или осушением) и граничных условий (регулированием оттока и притока подземных вод). Рассмотрим задачу оптимального управления УГВ функцией инфильтрации в одномерном случае, когда движение грунтовых вод описывается уравнением Буссинеска [1].

$$\mu(x)\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h}{\partial x}\right)-f(x,t)=0, \quad a<x<b, \quad 0<t\le t_m, \qquad (1)$$

$$h(x,0)=h_0(x), \quad a\le x\le b, \qquad (2)$$

$$-T\frac{\partial h}{\partial x}+\beta_1(t)h(a,t)=\alpha_1(t), \quad x=a, \quad 0<t\le t_m, \qquad (3)$$

$$T\frac{\partial h}{\partial x}+\beta_2(t)h(b,t)=\alpha_2(t), \quad x=b, \quad 0<t\le t_m, \qquad (4)$$

где

$h=h(x,t)=h(x,t;f)$ – уровень грунтовых вод (УГВ) $(м)$,

$$T(x,t)=k(x)[h(x,t)-b(x)] \quad - \qquad (5)$$

водопроводимость почвогрунтов ($м^2/сут$), $k(x)-$ коэффициент фильтрации $(м/сут)$, $b(x)-$поверхность водоупора $(м)$, $h_0(x)-$начальный УГВ $(м)$, $f(x,t)-$функция источников и стоков грунтовых вод (*м/сут*), $\mu(x)>0-$ водоотдача, $\beta_1(t)>0$, $\beta_2(t)>0$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)-$ заданные функции, t_m- заданный момент времени.

Задача оптимального управления УГВ ставится следующим образом [2]. Требуется определить такую управляющую функцию $f(x,t)$, которая при $t=t_m$ доставляет минимум функционалу

$$J(f)=\int_a^b\left[h(x,t_m;f(x,t_m))-\varphi(x)\right]^2dx+\alpha\int_0^{t_m}\int_a^b\left[f(x,t)\right]^2dxdt. \qquad (6)$$

Здесь $\varphi(x)-$ заданная функция, равная оптимальному УГВ, $\alpha>0$ – параметр регуляризации. Функция $f^0(x,t)$, обеспечивающая минимум функционалу (6), называется оптимальным управлением, а соответствующее ему решение уравнения (1), т.е. функция $h^0(x,t)-$оптимальным УГВ. По оптимальному управлению $f^0(x,t)$ можно определить норму полива (при низком залегании грунтовых вод) или дебиты горизонтальных и вертикальных дрен (при осушении).

Для решения сформулированной задачи вводится сопряженная функция $\psi(x,t)$, которая является решением следующей сопряженной задачи [2,3]

$$\mu(x)\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(T_\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=0, \quad a<x<b, \quad 0\le t<t_m, \qquad (7)$$

$$-T_\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}+\beta_1(t)\psi(a,t)=0, \quad x=a, \quad 0\le t<t_m,$$

$$T_\psi \frac{\partial\psi}{\partial x} + \beta_2(t)\psi(b,t) = 0\,, \quad x = b\,, \quad 0 \le t < t_m$$

с «начальным» условием

$$\psi(x,t_m) = -2\frac{h(x,t_m) - \varphi(x)}{\mu(x)} \tag{8}$$

и доказывается [3,4] , что оптимальное управление выражается формулой

$$f^{\,0}(x,t) = \frac{1}{2\alpha}\psi(x,t)\,. \tag{9}$$

Здесь $\qquad T_\psi(x,t) = k(x)[\psi(x,t) - b(x)]$.

Теперь остановимся на численном решении задачи (1). Взяв в качестве нулевого приближения начальное условие $h^{(0)} = h_0(x)$, определяем по формуле (5) функцию $T(x,t)$ и решая задачу (1), находим первое приближение $h^{(1)}$. Затем эту функцию подставляем в формулу (5) и определяем второе приближение $h^{(2)}$ и т.д. Итерационный процесс продолжим до выполнения условия

$$\left|h^{(\nu+1)}(x,t_k) - h^{(\nu)}(x,t_k)\right| < \varepsilon\,,$$

где $\nu -$ номер итерации, t_k – рассматриваемый момент времени, $\varepsilon > 0$ – заданное малое число.

Задачу (1) – (4) решаем методом конечных элементов. Разбиваем временной промежуток $[0,t_m]$ на m равных отрезков длиной $\tau = t_m / m$, а отрезок $[a,b]$ – на n частей точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ и путем замены производной по времени на отрезке $[t_{k-1},t_k]$ разностным отношением с весом $\sigma(0 < \sigma \le 1)$, уравнение (1) приводим к виду

$$-\sigma\frac{\partial}{\partial x}\left(T_k\frac{\partial h_k}{\partial x}\right) + Ph_k = Q_k\,, \quad k = 1,2,...,m\,, \tag{10}$$

$$\sigma\left(-T_{0,k}\frac{\partial h_{0,k}}{\partial x} + \beta_{1,k}h_{0,k}\right) = A_{1,k} \quad ,$$

$$\sigma\left(-T_{n,k}\frac{\partial h_{n,k}}{\partial x} + \beta_{2,k}h_{n,k}\right) = A_{2,k} \quad ,$$

где

$$h_k = h(x,t_k), \quad T_k = T(x,t_k), \quad P = \mu(x)/\tau, \quad f_k = f(x,t_k)\,,$$

$$Q_k = \sigma f_k + (1-\sigma)f_{k-1} + Ph_{k-1} + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial x}\left(T_{k-1}\frac{\partial h_{k-1}}{\partial x}\right),$$

$$A_{1,k} = \sigma\alpha_{1,k} + (1-\sigma)\left(\alpha_{1,k-1} + T_{0,k-1}\frac{\partial h_{0,k-1}}{\partial x} - \beta_{1,k-1}h_{0,k-1}\right),$$

$$A_{2,k} = \sigma\alpha_{2,k} + (1-\sigma)\left(\alpha_{2,k-1} - T_{n,k-1}\frac{\partial h_{n,k-1}}{\partial x} - \beta_{2,k-1}h_{n,k-1}\right).$$

На элементарном отрезке $[x_{i-1},x_i]$ введем линейные базисные функции

$$N_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{\Delta x_i}, \quad N_{i-1}(x) = \frac{x_i - x}{\Delta x_i}, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

и искомую функцию $h(x,t)$ представим в виде

$$h(x,t) \approx h_{i-1}(t)N_{i-1}(x) + h_i(t)N_i(x)\,, \tag{11}$$

где $h_i(t) = h(x_i,t)$.

Суммируя равенство (11) по всем элементарным отрезкам $[x_{i-1},x_i]$, $i = 1,2,...,n$, получим разложение искомой функции

$$h(x,t) \approx h_n(x,t) = \sum_{i=0}^{n} h_i(t) N_i(x) . \qquad (12)$$

В уравнении (10) вместо функции $h(x,t_k)$ подставим $h_n(x,t_k)$ и применим принцип Галеркина (для удобства записи в дальнейшем индекс k опускаем)

$$\int_a^b N_j(x)\left[-\sigma\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h_n}{\partial x}\right)+Ph_n-Q\right]dx+N_0(x)\left[\sigma\left(-T\frac{\partial h_n}{\partial x}+\beta_1 h_n-A_1\right)\right]\Bigg|_{x=a}+$$

$$+N_n(x)\left[\sigma\left(T\frac{\partial h_n}{\partial x}+\beta_2 h_n-A_2\right)\right]\Bigg|_{x=b} \quad , \qquad j=0,1,\dots,n .$$

Интегрируя по частям, получаем систему уравнений

$$\int_a^b \sigma T\frac{\partial h_n}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}dx+\int_a^b N_j(x)Ph_n dx-\int_a^b N_j(x)Qdx+N_0(\sigma\beta_1 h_0-A_1)\big|_{x=a}+N_n(\sigma\beta_2 h_n-A_2)\big|_{x=b}=0,$$

$$j=0,1,\dots,n .$$

Теперь подставим вместо функции $h_n(x,t_k)$ её разложение по формуле (12). Имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sigma T\frac{\partial N_j(x)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\big(N_{i-1}(x)h_{i-1}(t_k)+N_i(x)h_i(t_k)\big)dx+\right.$$

$$\left.+\int_{x_{i-1}}^{x_i}PN_j(x)\big(N_{i-1}(x)h_{i-1}(t_k)+N_i(x)h_i(t_k)\big)dx-\int_{x_{i-1}}^{x_i}QN_j(x)dx\right\}+$$

$$+\sigma\beta_1 h_0(t_k)-A_1+\sigma\beta_2 h_n(t_k)-A_2=0 , \qquad j=0,1,\dots, n \quad ,$$

или

$$\sum_{i=0}^{n} a_{ji}\, h_i = b_j , \qquad j=0,1,\dots,n, \qquad (13)$$

где

$$a_{00}=\sigma\int_{x_0}^{x_1} T\left(\frac{\partial N_0}{\partial x}\right)^2 dx+\int_{x_0}^{x_1} PN_0^{\,2}dx+\sigma\beta_1,$$

$$a_{ji}=\sigma\int_{x_{i-1}}^{x_i} T\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x}dx+\int_{x_{i-1}}^{x_i} PN_jN_i dx+\sigma\int_{x_i}^{x_{i+1}} T\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x}dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}} PN_jN_i dx,$$

$$1\le i\le n-1, \qquad 0\le j\le n ,$$

$$a_{nn}=\sigma\int_{x_{n-1}}^{x_n} T\left(\frac{\partial N_n}{\partial x}\right)^2 dx+\int_{x_{n-1}}^{x_n} PN_n^{\,2}dx+\sigma\beta_2 ,$$

$$b_0=\int_{x_0}^{x_1} QN_0 dx+A_1 ,$$

$$b_j = \int_{x_{i-1}}^{x_i} QN_j dx + \int_{x_i}^{x_{i+!}} QN_j dx , \qquad 1 \le j \le n-1 ,$$

$$b_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} QN_n dx + A_2 .$$

Поскольку базисная функция $N_j(x)$ отлична от нуля только на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, а вне этого отрезка равна нулю, то система (13) является трехдиагональной:

$$a_i h_{i-1}^{(k)} + b_i h_i^{(k)} + c_i h_{i+1}^{(k)} = d_i , \quad i = 1, 2, ..., n-1, \tag{14}$$

где

$$a_i = -\frac{\sigma}{\Delta x_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} T dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} N_{i-1} N_i P dx ,$$

$$b_i = \frac{\sigma}{\Delta x_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} T dx + \frac{\sigma}{\Delta x_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} T dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} N_i^2 P dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i^2 P dx ,$$

$$c_i = -\frac{\sigma}{\Delta x_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} T dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i N_{i+1} P dx ,$$

$$d_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} N_i Q dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i Q dx .$$

В точках $x = x_0$ и $x = x_n$ имеем соответственно уравнения

$$b_0 h_0 + c_0 h_1 = d_0 , \tag{15}$$

и

$$a_n h_{n-1} + b_n h_n = d_n , \tag{16}$$

где

$$b_0 = \frac{\sigma}{\Delta x_1^2} \int_{x_0}^{x_1} T dx + \int_{x_0}^{x_1} N_0^2 P dx + \sigma \beta_1 ,$$

$$c_0 = -\frac{\sigma}{\Delta x_1^2} \int_{x_0}^{x_1} T dx + \int_{x_0}^{x_1} N_0 N_1 P dx ,$$

$$d_0 = \int_{x_0}^{x_1} N_0 Q dx + A_1 ,$$

$$a_n = -\frac{\sigma}{\Delta x_n^2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} T dx + \int_{x_{n-1}}^{x_n} N_{n-1} N_n P dx ,$$

$$b_n = \frac{\sigma}{\Delta x_n^2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} T dx + \int_{x_{n-1}}^{x_n} N_n^2 P dx + \sigma \beta_2 ,$$

$$d_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} N_n Q dx + A_2 .$$

Система (14), (15), (16) решается методом прогонки. Предположив, что

$$h_i = u_i h_{i+1} + v_i , \quad i = 0, 1, ..., n-1, \tag{17}$$

из равенств (14) находим

$$u_i = -\frac{c_i}{a_i u_{i-1} + b_i} , \quad v_i = \frac{d_i - a_i v_{i-1}}{a_i u_{i-1} + b_i} \quad , \quad i = 1, 2, ..., n-1. \tag{18}$$

Для проведения счета по формулам (18) необходимо иметь значения u_0 и v_0, которые определяются из формул (15) и (17) при $i = 0$:

$$u_0 = -\frac{c_0}{b_0}, \quad v_0 = \frac{d_0}{b_0}. \tag{19}$$

Используя значения u_0 и v_0, по формулам (18) вычисляются прогоночные коэффициенты u_i и v_i, $i = 1, 2, ..., n-1$. Затем из формул (16) и (17) при $i=n-1$ определяется h_n:

$$h_n = \frac{d_n - a_n v_{n-1}}{a_n u_{n-1} + b_n} \tag{20}$$

и по формуле (17) находятся h_i, $i = n-1, n-2, ..., 1, 0$.

После решения задачи (1) на отрезке $[0, t_m]$, используя «начальное» условие (8), решается сопряженная краевая задача (7) - (8) с обратным течением времени.

Задача оптимального управления УГВ реализуется в виде следующего итерационного процесса. За начальное приближение возможного управления берётся функция $f^{(0)}(x,t) = 0$ и решается задача (1)-(4) для всех $t \in (0,t_m]$ и находится соответствующее поле УГВ $h^{(1)}(x,t)$. Затем, подставляя $h^{(1)}(x,t_m)$ вместо $h(x,t_m)$ в формуле (8) и используя функцию $\psi^{(0)}(x,t_m)$ в качестве «начального» условия, решается задача (7) для всех $t \in [0, t_m)$ и по формуле (9) определяется первое приближение управляющей функции $f^{(1)}(x,t)$. Подставляя $f^{(1)}(x,t)$ в уравнении (1), получаем следующие приближения $h^{(2)}(x,t)$ и $\psi^{(2)}(x,t)$ и т.д. Итерационный процесс продолжается до выполнения условий

$$\left|h^{(\nu)}(x,t_m) - h^{(\nu-1)}(x,t_m)\right| < \varepsilon, \quad \left|f^{(\nu)}(x,t_m) - f^{(\nu-1)}(x,t_m)\right| < \delta .$$

Приводим пример расчета оптимального управления, максимально приближенного к реальным условиям. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ УГВ описывается функцией

$$h_0(x) = \left(350^2 + \varepsilon(l-x)^2\right)^{1/2}, \tag{21}$$

$$\varepsilon = 10^{-4}, \quad l = 12 \cdot 10^3 \text{ м}.$$

Требуется за время $t_m = 10$ лет привести УГВ в оптимальное состояние, равное

1) $\varphi(x) = 350$ *м*.; **2)** $\varphi(x) = 360$ *м*.; **3)** $\varphi(x) = 370$ *м*.; **4)** $\varphi(x) = \left(350^2 + \varepsilon \cdot x^2\right)^{1/2}$.

В начальном состоянии функция инфильтрации была равна $f(x,t) = \varepsilon \cdot k(x)$, где $k(x)$ - коэффициент фильтрации. Она обеспечивала стабильный УГВ, равный (21) .

В табл. 1 даны значения функции $\varphi(x)$, оптимальных УГВ и управления.

Значения оптимальных УГВ и оптимального управления

Таблица 1

***x_i* , км**	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**
			I.				
$\varphi(x)$	350	350	350	350	350	350	350
$h^0(x)$	350.81	351.08	350.56	350.23	350.10	350.03	350.00
$f^0(x)$	-0.1476	-0.0055	0.0328	0.0251	0.0100	0.0004	-0.0024
			II.				
$\varphi(x)$	360	360	360	360	360	360	360

$h^0(x)$	360.55	360.72	360.38	360.10	359.87	359.59	359.61
$F^0(x)$	-0.0890	-0.0030	0.0164	0.0049	-0.0086	-0.0014	0.0500
III.							
$\varphi(x)$	370	370	370	370	370	370	370
$h^0(x)$	370.29	370.36	370.18	369.96	369.63	369.16	369.22
$F^0(x)$	-0.0304	-0.0004	0.0000	-0.0152	-0.0271	-0.0031	0.1026
IV.							
$\varphi(x)$	350.00	350.57	352.28	355.11	359.03	364.01	370.00
$h^0(x)$	350.00	350.58	352.28	355.11	359.02	364.00	369.99
$F^0(x)$	-0.2635	-0.0559	0.1509	0.3573	0.5637	0.7705	0.9781

Литература

1. Полубаринова–Кочина П.Я., Пряжинская В.Г., Эмих В.Н. Математические методы в вопросах орошения. –М.: Наука, 1969. - 414 с.
2. Джаныбеков Ч.Дж., Уралиев А.А. Об одном приближенном способе конструирования оптимальным управлением движениями подземных вод в неоднородной пористой среде // Вестник ИГУ, № 11, 2004. – С. 19-23.
3. Васильев П.Ф. Методы решения экстремальных задач. –М.: Наука,1981. – 400 с.
4. Джаныбеков Ч.Дж., Уралиев А.А. Алгоритм построения приближенного решения проблемы оптимального управления. // Вестник ИГУ, № 11, 2004. – С. 24-28.
5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.